

PHẦN II. ĐỘNG HỌC

CHƯƠNG IV

CHUYỂN ĐỘNG NGẪU A ĐM – CÁC PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN ĐỘNG NGẪU A ĐM

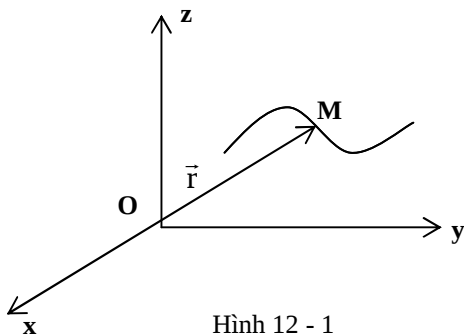
Bài 12. PHƯƠNG PHÁP VÉCTƠ

I. Phương trình chuyển động của điểm

Xét điểm M chuyển động trong hệ quy chiếu $Oxyz$. Vị trí của điểm M được xác định bởi vectơ $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ (hình 12 - 1). Vectơ $\vec{r}$ thay đổi phương chiều và độ dài theo thời gian. Liên hệ giữa $\vec{r}$ và t gọi là phương trình chuyển động của điểm dùng vectơ:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (12.1)$$

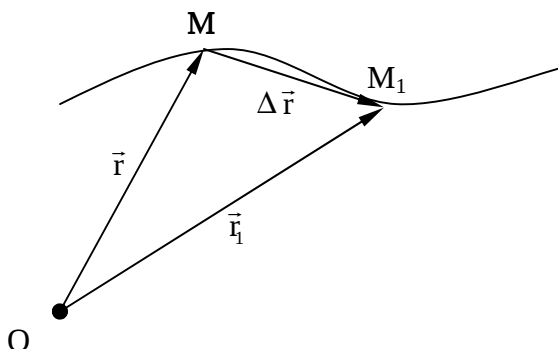
Quá tích của đường điểm trong hệ quy chiếu này gọi là quỹ đạo của điểm. Nếu quỹ đạo là thẳng thì chuyển động thẳng, nếu quỹ đạo là cong thì chuyển động cong.



Hình 12 - 1

II. Vận tốc của điểm

Giả sử tại thời điểm t , đường điểm ở vị trí M được xác định bởi vectơ $\vec{r}$. Tại thời điểm $t_1 = t + \Delta t$ đường điểm ở vị trí M_1 được xác định bởi vectơ $\vec{r}_1$. Như vậy, trong khoảng thời gian Δt , đường điểm di chuyển được một cung $\widehat{MM_1}$ tương ứng với $\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta \vec{r}$ (hình 12 - 2)



Hình 12 -

Đôi l ng $\vec{v}_{tb} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ g i là v n t c trung bình

V n t c c a đ ng đi m t i th i đi m t đ c xác đ nh nh sau:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{tb} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) \quad (12.2)$$

V y v n t c c a đ ng đi m b ng đ o hàm b c nh t c a véct đ nh v theo th i gian. Véct v n t c c a ch t đi m h ng v phía chuy n đ ng theo ti p tuy n c a qu đ o t i đi m đ ang xét.

Đ n v v n t c: m/s

II. Gia t c c a đi m

V n t c là đ i l ng thay đ i theo th i gian. Đ i l ng bi u th cho s thay đ i c a v n t c g i là gia t c. Ký hi u $\vec{a}$

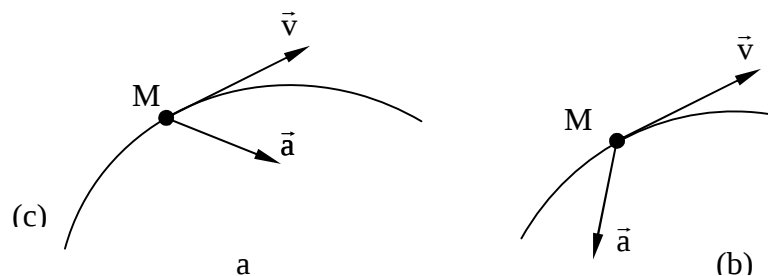
T ng t nh xác đ nh v n t c, gia t c c a đ ng đi m t i th i đi m t đ c xác đ nh nh sau (hình 12 – 3):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$$

V y gia t c c a đ ng đi m b ng đ o hàm b c nh t c a v n t c và b ng đ o hàm b c hai theo th i gian c a véct đ nh v. Véct gia t c lu n h ng v b l m c a qu đ o.

Đ n v gia t c: m/s²

- Khi $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$: ch t đi m chuy n đ ng nhanh đ n. (hình 12 – 4a)
- Khi $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$: ch t đi m chuy n đ ng ch m đ n. (hình 12 – 4b)



Hình 12-4

Bài 13. PHÁP NG PHÁP T A Đ DESCARTES

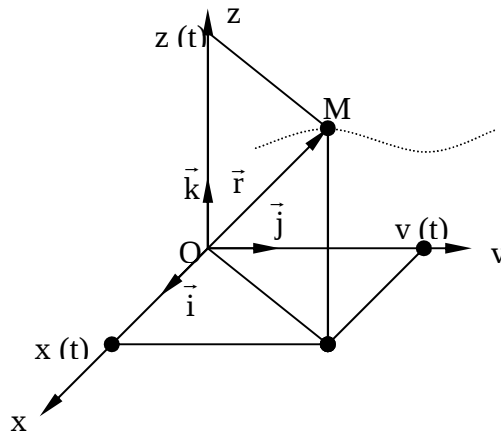
I. Phương trình chuyển động của điểm

Trong hệ tọa độ Descartes, vị trí của điểm M được xác định bởi 3 tọa độ (x, y, z) của nó. Khi M chuyển động, các thông số định vị này thay đổi theo thời gian (hình 10 – 1).

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t) \quad (13-1)$$

(13.1) gọi là các phương trình chuyển động của điểm theo tọa độ Descartes

Khi xét trong các phương trình chuyển động, ta có phương trình quỹ đạo của điểm di chuyển.



Hình 13-1

- Chú ý: gọi là phương pháp vectơ và phương pháp tọa độ Descartes có sự liên hệ chặt chẽ như sau:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Trong đó: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ (hình 13 - 1)

II. Vận tốc của điểm

Gọi v_x, v_y, v_z là hình chiếu của $\vec{v}$ trên các trục tọa độ thì

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k} \quad (a)$$

$$\text{Mà } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\text{Nên } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}$$

$$= x'(t) \cdot \vec{i} + y'(t) \cdot \vec{j} + z'(t) \cdot \vec{k} \quad (b)$$

So sánh (a) và (b) ta rút ra: $v_x = x'(t); v_y = y'(t); v_z = z'(t)$ (13.2)

Vì các hình chiếu của vận tốc trên các trục tọa độ Descartes bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của các tọa độ tương ứng.

Trên s, ph ng chi u c a v n t c đ c xác đ nh nh sau:

$$- \text{Trên s: } v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$- \text{Ph ng chi u: } \cos \alpha = \frac{v_x}{v}; \cos \beta = \frac{v_y}{v}; \cos \gamma = \frac{v_z}{v}$$

α, β, γ : là góc t o b i $\vec{v}$ v i các tr c t a đ x, y, z

III. Gia t c c a đ m

T ng t nh v n t c, g i a_x, a_y, a_z là hình chi u c a $\vec{a}$ trên các tr c t a

$$\text{đ: } a_x = \frac{dv_x}{dt} = v'_x(t) = x''(t)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = v'_y(t) = y''(t)$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = v'_z(t) = z''(t)$$

$$- \text{Trên s gia t c: } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (13 - 3)$$

$$- \text{Ph ng chi u: } \cos \alpha' = \frac{a_x}{a}; \cos \beta' = \frac{a_y}{a}; \cos \gamma' = \frac{a_z}{a}$$

α', β', γ' : là góc t o b i $\vec{a}$ v i các tr c t a đ x, y, z

* **Ví d**: Viên đ n bay trong không gian Oxy theo quy luật:

$$x = v_0 t \cos \alpha \quad (a)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha \quad (b)$$

Trong đó v_0 là v n t c, α là góc b n .

Tìm v n t c, gia t c, qu đ o viên đ n, đ cao và t m xa c a viên đ n.

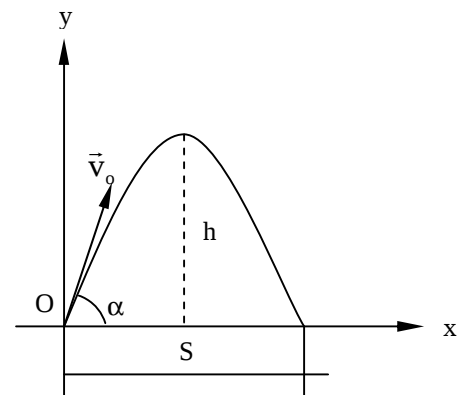
Gi i

$$(a) \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

Th vào (b) ta đ c:

$$y = -\left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\right)x^2 + x \cdot \tan \alpha$$

V y qu đ o c a viên đ n là đ ng parabol



Vận tốc viên đạn:

$$v_x = x'(t) = v_o \cos \alpha$$

$$v_y = y'(t) = -gt + v_o \sin \alpha$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_o \cos \alpha)^2 + (v_o \sin \alpha - gt)^2}$$

Gia tốc viên đạn:

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g$$

Khi viên đạn chạm đất thì $y(t) = 0$

$$\Leftrightarrow y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_o t \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow t = 0 \text{ và } t = \frac{2v_o \sin \alpha}{g} \quad (t \neq 0)$$

$$\text{Thời xa của viên đạn: } s = x(t) = v_o \cos \alpha \cdot \frac{2v_o \sin \alpha}{g} = \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Do tính đối xứng của Parabol, ta có độ cao của viên đạn đạt cực đại thì điếm $\frac{t}{2}$

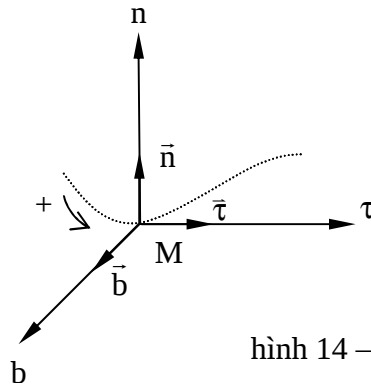
$$\Rightarrow h = y\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{g}{2} \left(\frac{v_o \sin \alpha}{g}\right)^2 + v_o \sin \alpha \cdot \frac{v_o \sin \alpha}{g} = \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Bài 14. PHÂN NG PHÁP TỌA ĐỘ TỰ NHIÊN

I. Phân trình chuyển động của điểm

1. Hệ tọa độ tự nhiên

Điểm trong mặt phẳng tiếp tuyến với quỹ đạo tại điểm M trục Mz hướng theo tiếp tuyến của quỹ đạo về phía dương, có vectơ đơn vị là $\vec{\tau}$. Điểm trục Mn hướng theo pháp tuyến của quỹ đạo về phía lõm Mn nằm trong mặt phẳng tiếp gập là pháp tuyến chính có vectơ đơn vị là $\vec{n}$. Điểm pháp tuyến Mb gập là trùng pháp tuyến có vectơ đơn vị là $\vec{b}$ (thường chọn chiều của $\vec{b}$ sao cho $M_{\vec{\tau}\vec{n}\vec{b}}$ là tam diện thuận) (hình 14 - 1)

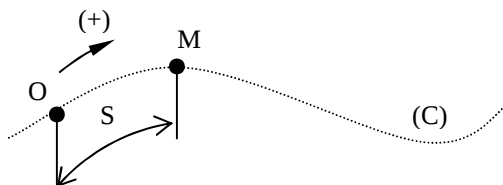


hình 14 - 1

Như vậy, tại mỗi điểm của đường cong, ta luôn dựng được hệ tọa độ vuông góc có 3 trục hướng theo tiếp tuyến, pháp tuyến chính và trùng pháp tuyến gập là hệ tọa độ tự nhiên. Hệ tọa độ tự nhiên thay đổi theo vị trí của điểm M trên quỹ đạo.

2. Phân trình chuyển động

Trên quỹ đạo của điểm chuyển động, ta chọn O làm gốc. Khi đó, vị trí của điểm chuyển động xác định bởi thông số $s = \widehat{OM}$. Khi M chuyển động, s biến thiên theo thời gian.



$s = s(t)$ gọi là phân trình chuyển động của điểm theo hệ tọa độ tự nhiên.

* Chú ý: s là đại lượng vô hướng. Tuy nhiên nếu chọn chiều đường của quỹ đạo là chiều chuyển động của điểm thì s luôn dương.

II. Vận tốc của điểm

Để xác định vận tốc $\vec{v}$ ta tìm hình chiếu của nó lên các trục của hệ tọa độ tự nhiên. Vì $\vec{v}$ hướng theo tiếp tuyến của quỹ đạo tại M nên $\vec{v} = v_{\tau} \cdot \vec{\tau}$ (vì $v_n = v_b = 0$)

$$|\vec{v}| = |v_\tau| = \left| \frac{ds}{dt} \right| = |s'(t)|$$

Do cả v_τ và $s'(t)$ luôn trùng nhau (cùng dấu ng ngược chiều chuyển động theo chiều dương qu đạo và cùng âm trong trường hợp ngược chiều).

$$\text{Vậy suy ra: } v_\tau = s'(t) \quad (14.2)$$

III. Gia tốc của điểm

Tính toán như vnn ta tìm hình chiếu của nó trên các trục tọa độ thì nhiên ta có:

$$\vec{a} = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n} + a_b \cdot \vec{b} \quad (a)$$

Mặt khác:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_\tau \cdot \vec{\tau}) = v'_\tau \cdot \vec{\tau} + v_\tau \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = v'_\tau \cdot \vec{\tau} + v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

Theo hình học vi phân thì $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho}$ với ρ là bán kính cong qu đạo tại điểm đang xét

$$\text{Vậy ta có: } \vec{a} = v'_\tau \cdot \vec{\tau} + \frac{v_\tau^2}{\rho} \cdot \vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \quad (b)$$

So sánh (a) và (b) ta suy ra:

$$a_\tau = v'_\tau(t) = s''(t) ; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} ; \quad a_b = 0 \quad (14.3)$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad (14.4)$$

Vì $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ luôn dương nên $\vec{a}$ luôn hướng vào b lõm của qu đạo.

* Ý nghĩa của các thành phần gia tốc:

$$- a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0 \text{ khi } \rho \rightarrow \infty \text{ tức là điểm chuyển động thẳng}$$

- $a_n \neq 0$ điểm chuyển động cong.

Vậy, a_n biểu thị cho sự đổi hướng của vnn.

- $a_\tau = v'_\tau(t) = 0$ thì v_τ hằng số, tức là điểm chuyển động đều.

- $a_\tau \neq 0$ thì v_τ biến thiên, điểm chuyển động không đều.

Vậy, a_τ biểu thị cho sự thay đổi về trị số của vnn.

+ Khi a_τ và v cùng dấu : Điểm chuyển động nhanh dần.

+ Khi a_τ và v ngược dấu : Điểm chuyển động chậm dần.

*** Ví dụ**

Điểm chuyển động trên vòng tròn bán kính $r = 1\text{m}$ theo phương trình $s = t^3 - 16t$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây)

- Xác định vận tốc và gia tốc tại thời điểm $t = 2\text{s}$
- Xét xem tại thời điểm đó, điểm chuyển động nhanh hay chậm dần.

Giải

$$v = s'(t) = 3t^2 - 16$$

Khi $t = 2\text{s}$ thì $v = 3 \cdot 2^2 - 16 = -4\text{ m/s}$

$$a_t = v'(t) = 6t = 6 \cdot 2 = 12\text{m/s}^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(-4)^2}{1} = 16\text{m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20\text{m/s}^2$$

Vì a_t và v trái dấu nên điểm chuyển động chậm dần.

Bài 15. MÔ TẢ CHUYỂN ĐỘNG THẲNG NGẪU**I. Chuyển động đều**

Chuyển động đều là chuyển động mà vận tốc có độ lớn chuyển động có trị số không đổi.

$$v = \text{hằng số}$$

$$a_{\tau} = v'_{\tau}(t) = 0$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

1. Chuyển động thẳng đều

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0 \quad (\rho \rightarrow \infty) \quad ; \quad a_{\tau} = 0$$

Phương trình chuyển động : $s = s_0 + vt$

Trong đó: v và s_0 là vận tốc và quãng đường đi ban đầu của vật.

2. Chuyển động cong đều

$$a_{\tau} = 0 \quad ; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$$

Phương trình chuyển động : $s = s_0 + vt$

II. Chuyển động biến đổi đều

Là chuyển động mà gia tốc tỉ lệ thuận với vận tốc có giá trị không đổi.

$$a_{\tau} = \text{hằng số} \quad ; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad ; \quad v = v_0 + a_{\tau}t$$

1. Chuyển động thẳng biến đổi đều

$$a_n = 0 \quad ; \quad a_{\tau} = \text{hằng số}$$

$$v = v_0 + a_{\tau}t$$

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_{\tau}t^2$$

2. Chuyển động cong biến đổi đều

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad ; \quad a_{\tau} = \text{hằng số} \quad ; \quad a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}$$

$$v = v_0 + a_{\tau}t$$

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_{\tau}t^2$$

*** Ví dụ :**

Một ôtô chuyển động nhanh dần đều trên cung tròn bán kính $r = 1000\text{m}$, từ trạng thái đứng yên sau 2 phút nó đi được quãng đường $S = 1200\text{m}$. Hãy tính tốc độ và gia tốc sau 2 phút đó.

Giải

$$\text{Ta có : } s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2$$

$$\text{chọn } s_0 = 0$$

$$\text{Mặt khác } v_0 = 0 \text{ (ban đầu ôtô đứng yên)}$$

$$\text{Nên } s = \frac{1}{2} a_t t^2$$

$$\Rightarrow a_t = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 1200}{120^2} = \frac{1}{6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Tốc độ sau 2 phút :

$$v = v_0 + a_t t = a_t \cdot t = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Gia tốc pháp tuyến : } a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{20^2}{1000} = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Gia tốc sau 2 phút:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + (0,4)^2} = 0,43 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

- Viết công thức xác định vận tốc và gia tốc của điểm theo phương pháp vectơ.
- Điểm chuyển động có $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ thì quy luật chuyển động của điểm là gì?
- Viết công thức xác định vận tốc và gia tốc của điểm theo phương pháp tọa độ Descartes.
- Điểm chuyển động có $\frac{v_x}{v_y} = \text{hằng số}$ thì quy luật chuyển động của điểm như thế nào?
- Viết biểu thức xác định vận tốc và gia tốc của điểm chuyển động cong tổng quát.

6. Đối với các điểm chuyển động thẳng (hình cong) có thể xảy ra các trường hợp sau không?

a) $v > 0$ và $a_t < 0$

b) $v < 0$ và $a_t > 0$

Chuyển động thẳng với mọi trường hợp có đặc điểm gì?

7. Phân tích trình chuyển động, vận tốc của điểm trong chuyển động thẳng và cong biến đổi đều để xác định như thế nào? Nếu thay đổi góc quy chiếu hoặc góc thiên gian thì các biểu thức đó có gì thay đổi không?

8. Khi nào điểm chuyển động không có gia tốc tiếp tuyến, không có gia tốc pháp tuyến và cả hai thành phần gia tốc đó đều không có?